Αρμονικές συναρτήσεις (Ορισμός – Ιδιότητες – Ασκήσεις)

• Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U ανοικτό, με συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο U, που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) = 0, \ \forall \ \bar{x} \in U}$$

καλείται αρμονική συνάρτηση στο U

Σχόλιο

Εισάγοντας τον γραμμικό τελεστή του Laplace ή αλλιώς Λαπλασιανή,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad ή \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

η παραπάνω εξίσωση γράφεται (ισοδύναμα) ως

$$\Delta f = 0 \quad ή \quad \nabla^2 f = 0$$

Η εξίσωση καλείται εξίσωση του Laplace, είναι εμφανώς μια διαφορική εξίσωση, με λύσεις της αρμονικές συναρτήσεις.

(Άλγεβρα αρμονικών συναρτήσεων)

Να δειχθεί ότι:

i) το άθροισμα δυο αρμονικών συναρτήσεων του $\mathbb{R}^n$, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

Λύση:

Έστω $f = f_1 + f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$

και $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} = 0$

Είναι, $f = f_1 + f_2$ με $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Ακόμη, $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f_1 + f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2}$, $i = 1, \dots, n$

Είναι λοιπόν, $\displaystyle\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} = \Delta f_1 + \Delta f_2 = 0 + 0 = 0,$$

άρα $\underset{(\text{στον } \mathbb{R}^n)}{\Delta f} = 0 \Leftrightarrow f$ αρμονική στον $\mathbb{R}^n$ ■

ii) το γινόμενο δυο αρμονικών συναρτήσεων του $\mathbb{R}^n$, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

Λύση:

Έστω $f = f_1 \cdot f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$

και $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} = 0$

Είναι, $f = f_1 \cdot f_2$ με $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Ακόμη, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f_1 \cdot f_2) = \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} \cdot f_2 + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} \cdot f_1$, $i = 1, \dots, n$

Είναι λοιπόν, $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} \cdot f_2 + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} \cdot f_1 \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} \cdot f_2 \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} \cdot f_1 \right) \quad f_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}$$

$$+ f_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} = f_2 \cdot \Delta f_1 + f_1 \cdot \Delta f_2 = 0 + 0 = 0,$$

άρα $\Delta f = 0 \Leftrightarrow f$ αρμονική στον $\mathbb{R}^n$ ∎

iii) το πηλίκο δυο αρμονικών συναρτήσεων του $\mathbb{R}^n$, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

Λύση:

Έστω $f = \dfrac{f_1}{f_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$, $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ και $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$

Είναι, $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ με $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Ακόμη, $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}\cdot f_2 - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2}\cdot f_1}{f_2^2}, \quad i=1,\ldots,n$$

Είναι λοιπόν, $$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}\cdot f_2 - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2}\cdot f_1}{f_2^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}\cdot f_2}{f_2^2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2}\cdot f_1}{f_2^2}\right) = \frac{1}{f_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}$$

$$+ \frac{f_1}{f_2^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{f_2}\cdot \Delta f_1 - \frac{f_1}{f_2^2}\cdot \Delta f_2 = 0 - 0 = 0,$$

άρα $\Delta f = 0 \iff f$ αρμονική στον $\mathbb{R}^n$ ∎

• Ασκήσεις

1) Να εξετασθούν οι κάτωθι συναρτήσεις, ως προς την αρμονικότητα

i) $f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (ΟΧΙ)

ii) $f_2(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (ΝΑΙ)

iii) $f_3(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (ΟΧΙ)

Λύση: (i) Προφανώς $f_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ (σύνθεση συν. απείρως διαφ/μων)

Για $(x,y) \neq (0,0)$ | $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Είναι, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ ① και

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) \underset{x,\,y}{\overset{\text{συμμετρία}}{=}} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \quad ②$$

Άρα, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\Delta f_1 \overset{①,②}{=} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \dfrac{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$, και άρα f_1 μη αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Τελικά δηλαδή f_1 μη αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

(ii) Προφανώς $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ (σύνθεση συν. απείρως διαφ/μων)

Είναι, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \underset{x,y}{\overset{\text{συμ}}{=}} \frac{y}{x^2+y^2}$

Είναι,
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) \underset{x,y}{\overset{\text{συμ}}{=}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (2)$$

Άρα, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\Delta f_2 \overset{(1),(2)}{=} \frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$,

και άρα f_2 αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(iii) Προφανώς $f_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ $\left(f_3 = \frac{1}{f_4}\right.$, με $f_4 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και $\left.f_4 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})\right)$

Είναι, $\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

Συμμετρικά, $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

Είναι, $\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right) = \frac{-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{3x(x^2+y^2+z^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

$= \frac{-(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2+z^2) + 3x(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{3x}{x^2+y^2+z^2} - 1$ (1)

Συμμετρικά, $\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{3y}{x^2+y^2+z^2} - 1$ (2)

$\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{3z}{x^2+y^2+z^2} - 1$ (3)

Άρα, $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\Delta f_3 \overset{(1),(2),(3)}{=} \frac{3(x+y+z-1)}{x^2+y^2+z^2} \neq 0$,

και άρα f_3 μη αρμονική στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

2) Έστω $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$.

Αν f αρμονική στο $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}$ επίσης αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση:

$$f \in C^3(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \nabla f \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

Είναι, f αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \Delta f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ (A)

, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. (υπόθεση).

Θέτω $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, με:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y))\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(g(x,y))\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \underset{\text{στην } f}{\overset{\text{Θ. Schwarz}}{=\!=}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \xrightarrow{(A)} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 0 \Leftrightarrow \Delta g = 0$$

$\Leftrightarrow g(x,y)$ αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ ■

3) Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: f = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\left(1-\frac{n}{2}\right)}$,

δείξτε ότι f αρμονική στον $\mathbb{R}^n$.

Λύση:

Έστω $i = 1, \dots, n$. Τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i\left(1-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\left(-\frac{n}{2}\right)}$$, και ακόμη

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2\left(1-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\left(-\frac{n}{2}\right)} + 4x_i^2\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\left(-\frac{n}{2}-1\right)}$$

Αθροίζοντας έχω, $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = n \cdot 2\left(1-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\left(-\frac{n}{2}\right)}$$

$$+ 4(x_1^2 + \dots + x_n^2)\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}\right)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\left(-\frac{n}{2}-1\right)} = 0,$$

άρα $\Delta f = 0$ στον $\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow f$ αρμονική στον $\mathbb{R}^n$ ∎